

УДК 5530.12+531.51

# ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ MARLE В РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА: 3-D ПРОФИЛИ ПЛОТНОСТИ ПРОТОПЛАНЕТНЫХ ДИСКОВ

Т.Р. Абдульмянов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *abdulmyanov.tagir@yandex.ru*; Казанский государственный энергетический университет

*Из уравнений гидродинамики, при помощи их упрощения, выведена модель волнового уравнения и получена формула для вычисления профилей плотности протопланетных дисков.*

**Ключевые слова:** компьютерное моделирование, поверхностная плотность протопланетного диска.

**Вывод волнового уравнения из уравнений гидродинамики и решение волнового уравнения.** Сжатие протозвездного облака сопровождалось формированием ударных волн в центре протопланетного диска [3]. Такие возмущения в центре диска могли распространяться в виде круговых поверхностных волн и плотностных волн по поверхности всего протопланетного диска.

Предположим, что радиус протозвездного облака и его средняя плотность в момент времени  $t$  были равны соответственно  $R$  и  $\rho_0$ . Выберем прямоугольную систему координат  $(x, y, z)$  с началом координат в центре диска так, чтобы плоскость  $(x, y)$  проходила через центральную плоскость диска ( $z = 0$ ). Гравитационный потенциал точки с координатами  $(x, y, z)$  внутри облака будет равен  $U(x, y, z) = GM(3R^2 - r^2)/(2R^3)$ ,  $0 < r < R$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . В этом случае потенциал  $U$  является решением уравнения Пуассона  $\Delta U = -4\pi G\rho(x, y, z)$ , где  $\rho(x, y, z)$  - непрерывная дифференцируемая функция (Дубошин, 1975). Вне протозвездного облака ( $r > R$ ) потенциал  $U$  будет равен  $U(x, y, z) = GM/r$  и будет решением уравнения Лапласа  $\Delta U = 0$ . По мере сжатия протозвезды ее радиус  $R$  будет уменьшаться, а средняя плотность  $\rho_0$  будет увеличиваться. В результате сжатия вращающегося протозвездного облака будет формироваться протопланетный диск.

## Основные уравнения движения газопылевых частиц и их упрощение

Рассмотрим протопланетный диск, имеющий радиус  $R_0$ , толщина которого намного меньше радиуса  $R_0$ . Предположим, что плоскость  $(x, y)$  и протопланетный диск вращаются синхронно в одном и том же направлении. В качестве исходных уравнений движения газопылевых частиц рассмотрим основные уравнения гидродинамики (Армитедж, 2010):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \text{div}(\vec{V}) + \vec{V} \cdot \text{grad}(\rho) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \Delta) \cdot \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(P), \quad (2)$$

где  $V$  - скорость движения газопылевых частиц,  $\rho$  - плотность диска,  $P$  - давление,  $\vec{F}$  - вектор гравитационного притяжения. В невозмущенном состоянии поверхность

ная плотность протопланетного диска будет постоянной  $\rho_0$ , а вектор гравитационного притяжения будет равен  $\vec{F} = (1/\rho) \cdot \text{grad}(P)$ . Возмущения в движении газопылевых частиц будем рассматривать при помощи упрощенных уравнений (1) и (2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \text{div}(\vec{V}) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(P). \quad (4)$$

Слагаемые  $\vec{V} \cdot \text{grad}(\rho)$  и  $(\vec{V} \cdot \Delta) \cdot \vec{V}$ , в этом случае, будут малыми величинами более высокого порядка, чем основные возмущения. Согласно уравнениям (3) и (4), любые возмущения в движении газопылевых частиц будут приводить к соответствующим изменениям плотности  $\rho(x, y, z)$ . Для того, чтобы определить эти возмущения и соответствующие им изменения плотности  $\rho$ , введем функцию  $s(x, y, z) = u(x, y, z) + s_{pl}(x, y)$ , которая связана с плотностью  $\rho$  при помощи следующего равенства:  $\rho = \rho_0[1 + s(x, y, z)]$ . Поверхностные возмущения протопланетного диска могут иметь как плоскую, так и ортогональную составляющую. Плоская составляющая возмущений ранее рассматривалась Сафроновым [2]. Поэтому здесь рассмотрим только влияние ортогональной составляющей возмущений и соответствующей им части  $u(x, y, z)$  поверхностной плотности. В этом случае

$$\frac{\partial \rho}{\rho \partial t} = \frac{\rho_0}{\rho_0(1+u)} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial t} + \dots = \frac{\partial u}{\partial t} + O(u^2),$$

$$\vec{V} \cdot \frac{1}{\rho} \text{grad}(\rho) = \vec{V} \cdot (1 - u + \dots) \text{grad}(u) = O(u^2).$$

В последнем выражении предполагается, что координаты вектора скорости являются величинами порядка  $O(u)$ . В этом случае уравнение (3) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{div}(\vec{V}) + O(u^2), \quad |u| < 1. \quad (5)$$

Для диска, имеющего коэффициент упругости  $c^2$ , справедливо следующее уравнение, при помощи которого можно выразить градиент давления через плотность:  $\text{grad}(P) = c^2 \cdot \rho_0 \cdot \text{grad}(u)$ . Подставляя это выражение для градиента давления в уравнение (4) с таким же приближением  $O(u^2)$  вместо уравнения (4) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{F} - c^2 \text{grad}(u). \quad (6)$$

Вычисляя дивергенцию правой и левой части равенства (6) преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\vec{V}) = \text{div}(\vec{F}) - c^2 \text{div}(\text{grad}(u)),$$

$$\text{div}(\vec{F}) = \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} = -\frac{GM}{R^3} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 - \frac{4}{3}\pi G\rho_0 u, (0 < r < R), \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0, (r \geq R).$$

Учитывая это, вместо равенства (5) получим следующее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + 4\pi G\rho_0 u/3. \quad (7)$$

В цилиндрической системе координат волновое уравнение (7) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + 4\pi G\rho_0 u/3. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) можно получить при помощи известного метода разделения переменных. Согласно этому методу решение  $u(r, \varphi, z, t)$  можно сначала искать в виде произведения двух новых искомым функций:  $u(r, \varphi, z, t) = T(t) \cdot V(r, \varphi, z)$ . Подставляя это выражение для функции  $u$  в уравнение (8) получим следующее уравнение для новых искомым функций  $T$  и  $V$ :

$$\frac{V}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \left( T \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + T \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + T \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + T \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) + 4\pi G\rho_0 TV/(3c^2). \quad (9)$$

Теперь уравнение (9) можно заменить равносильной ему системой двух более простых уравнений. Для этого необходимо правую и левую часть уравнения (9) разделить на произведение функций  $V$  и  $T$ :

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \left( \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{Vr} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{Vr^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) + 4\pi G\rho_0/(3c^2) = -\lambda^2. \quad (10)$$

Левая часть уравнения (10) является функцией только переменной  $t$ , а правая - только от  $r, \varphi$  и  $z$ . В таких случаях, как легко это доказать, как правая, так и левая части равенства (10) будут равны одной и той же константе. Обозначим эту константу через  $-\lambda^2$ . В результате, вместо уравнения (10) получим следующие два уравнения:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + A^2 \lambda^2 T = 0, \quad (11)$$

$$\left( \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{Vr} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{Vr^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) + 4\pi G\rho_0/(3c^2) = -\lambda^2. \quad (12)$$

Уравнение (11) имеет простое решение. Поэтому, рассмотрим уравнение (12). Решение уравнения (12) будем искать также методом разделения переменных, представив искомую функцию  $V$  в виде произведения функций  $W$  и  $Z$ :  $V(r, \varphi, z) = W(r, \varphi) \cdot Z(z)$ . Подставляя это выражение для функции  $V$  в уравнение (12) получим следующее уравнение:

$$\left( Z \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{Z}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{Z}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + W \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right) = -[4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2] W \cdot Z. \quad (13)$$

Разделяя уравнение (13) на произведение  $W \cdot Z$ , получим:

$$\left( \frac{1}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{Wr} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{Wr^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right) = -[4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2].$$

Или, в другой форме:

$$\frac{1}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{Wr} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{Wr^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + [4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2] = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\gamma^2. \quad (14)$$

Левая часть равенства (14) является функцией только переменных  $r$  и  $\varphi$ , а правая часть - функцией только переменной  $z$ . Тогда и правая, и левая часть этого равенства будут равняться константе, которую обозначим через  $-\gamma^2$ . Выбор знака констант в уравнении (12) связан с начальными условиями краевой задачи, а в уравнении (14) связан со спецификой конкретного физического процесса, который моделируется и эта константа может быть как положительной, так и отрицательной. Разделяя переменные, вместо уравнения (14) получим следующие два уравнения:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \gamma^2 Z = 0. \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + [4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2] W = 0. \quad (16)$$

Уравнение (15) имеет простое решение. Для решения уравнения (16) также воспользуемся методом разделения переменных. Представим функцию  $W$  представим в виде произведения функций  $R(r)$  и  $\Phi(\varphi)$ . Подставляя это выражение для функции  $W$  в уравнение (16), получим:

$$\Phi \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\Phi}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + [4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2] R \cdot \Phi = 0. \quad (17)$$

Разделим правую и левую части уравнения (17) на произведение  $R \cdot \Phi$  и преобразуем к следующему виду:

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + [4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2] r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \nu^2. \quad (18)$$

Левая часть уравнения (18) является функцией только  $r$ , а правая часть - только  $\varphi$ . Тогда из этого равенства будет следовать, что и правая, и левая его части будут равны одной и той же константе. Обозначим такую константу через  $\nu^2$ . Тогда, вместо уравнения (18), получим следующие два уравнения:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \nu^2 \Phi = 0, \quad (19)$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + [4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2] r^2 - \nu^2 = 0. \quad (20)$$

Уравнение (19) имеет простое решение, а уравнение (20) является уравнением Бесселя:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left[ \{4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2\} - \frac{\nu^2}{r^2} \right] R = 0. \quad (21)$$

Обозначим через  $x$  произведение  $[4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2]^{1/2} r$ . Тогда уравнение (20) примет классическую форму уравнения Бесселя:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial R}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0. \quad (22)$$

Частными решениями уравнения (22) являются функции Бесселя порядка  $\nu$ :

$$R(x) = J_\nu(x) = J_\nu(r \sqrt{4\pi G\rho_0/(3c^2) + \lambda^2 + \gamma^2}).$$

Рассмотрим теперь решения уравнений (11), (15) и (19). Корни характеристических уравнений для дифференциальных уравнений (11) и (19) являются чисто мнимыми, без вещественной части, а для уравнения (15) - корни действительные числа. Тогда решениями этих уравнений будут соответственно следующие функции:  $T_{kv}(t) = a_{kv} \cos[c(-\lambda)^{1/2} t] + b_{kv} \sin[c(-\lambda)^{1/2} t]$ ,  $Z(z) = z_0 \cdot \exp(-\gamma z)$ ,  $\Phi_\nu(\varphi) = \cos(\nu\varphi + \varphi_0)$ . Подставим эти решения в общее выражение для  $u(r, \varphi, z, t) = T(t) \cdot R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z)$  и получим частные решения волнового уравнения (8). Учитывая линейность волнового уравнения (8) сумма частных решений (их линейная комбинация), также будет решением волнового уравнения (8). Это решение и будет общим решением волнового уравнения (8):

$$u(r, \varphi, z, t) = z_0 \exp(-\gamma z) \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_\nu(\varphi) \sum_{k=0}^{\infty} T_{kv}(t) R_{kv}(r), \quad (23)$$

где  $T_{kv}(t) = a_{kv} \cos[c(-\lambda)^{1/2} t] + b_{kv} \sin[c(-\lambda)^{1/2} t]$ ,  $Z(z) = z_0 \cdot \exp(-\gamma z)$ ,  $R_{kv}(r) = J_\nu(0)$ ,  $J_\nu$  - функция Бесселя порядка  $\nu$ ,  $\lambda_{kv}$  - нули функции Бесселя  $J_\nu$ ;  $R_0$  - радиус протопланетного диска,  $\varphi_0$ ,  $z_0$ ,  $a_{kv}$ ,  $b_{kv}$  - произвольные константы и коэффициенты, определяемые при помощи начальных и граничных условий краевой задачи.

**Решение краевой задачи для волнового уравнения.** Температурные профили для протопланетных дисков рассматривались в статье Адамса и Шу [1] как профили тонкого плоского пассивного диска:  $T \approx r^{-3/4}$ . В этом случае скорости звука для газа определяются по следующей формуле:  $c_s \approx r^{-3/8}$ . В результате, для вертикально изотермического протопланетного диска было получено следующее выражение для толщины диска:  $h/r \approx r^{1/8}$ . Для Солнечной системы, согласно вычислениям Сафронова [2], отношение  $\beta = h/r$  равно 0.019 на уровне Меркурия и увеличивается до величины 0.033 на уровне планет-гигантов, где  $h$  - половина толщины протопланетного диска на расстоянии  $r$  от центра диска. То есть, среднее значение параметра  $\beta$  равно 0.026. Следовательно, параметр  $h$  в первом приближении можно представить как линейную функцию полярного радиуса  $r$ :  $h = 0.012 + 0.026 \cdot r$ . Предположим, что такая же зависимость толщины диска от расстояния до центра диска в начальный момент времени была для всех значений полярного угла. Функция  $h(r)$  входит в определение начальных условий задачи Коши для волнового уравнения (8). Начальные и граничные условия краевой задачи для волнового уравнения (8) определим следующим образом:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z, 0) &= z_0 \cdot \exp(-\gamma_0 \cdot z) \cos(\varphi_0) f(r, \varphi), \quad u_t(r, \varphi, 0) = 0, \\ |u(0, \varphi, t)| &< \infty, \quad u(R_0, \varphi, z, t) = 0.012 \cdot z_0 \exp(-\gamma \cdot z) \cos(\varphi_0), \end{aligned} \quad (24)$$

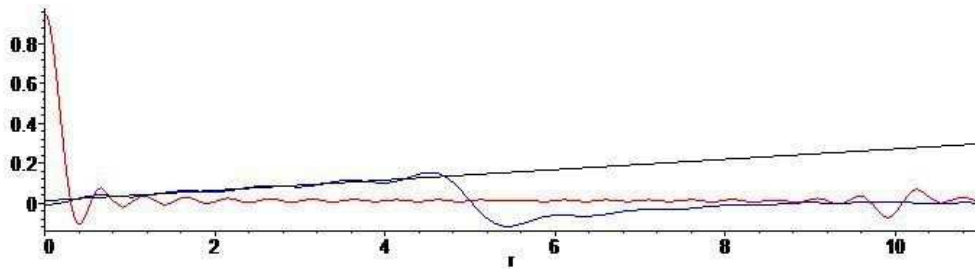
где  $f(r, \varphi)$  - функция, определяющая форму поверхности протопланетного диска в начальный момент времени, то есть  $f(r, \varphi) = 0.012 + 0.026 \cdot r / R_0$ . Так как в начальный момент времени форма поверхности диска, согласно предположению, была одинакова по всем радиальным направлениям, то индекс суммирования  $\nu$  в решении (23) будет равен нулю.

Предположим, что функция  $f(r)$  имеет более общий вид, то есть, форму полинома  $f(r) = c_0 + c_1 \cdot r + c_2 \cdot r^2 + \dots + c_k \cdot r^k$ . Функцию  $f(r)$ , при помощи ортогональной системы функций  $\{x^{1/2} \cdot J_0(\lambda_k r / R_0)\}$ , разложим в ряд по функциям Бесселя  $J_0(\lambda_k r / R_0)$ :

$$f(r) = c_0 + c_1 \cdot r + c_2 \cdot r^2 + \dots + c_k \cdot r^k = a_0 + a_1 J_0(\lambda_1 r / R_0) + a_2 J_0(\lambda_2 r / R_0) + \dots + a_k J_0(\lambda_k r / R_0).$$

Неизвестные коэффициенты  $a_k$  этого ряда определяются по формуле:

$$a_k = c_k R_0 \int_0^{R_0} \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 J_0(\lambda_k r / R_0) dr / \int_0^{R_0} \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 J_0^2(\lambda_k r / R_0) dr. \quad (25)$$



**Рис. 1.** Аппроксимация начальной формы диска: график прямой  $0.012 + 0.026 \cdot r$  (чёрная линия), аппроксимирующая функция, полученная при помощи (25) (синяя кривая) и аппроксимирующая функция, полученная при помощи оценки  $\lambda_k < 3k + 1$  (красная кривая).

Для линейной функции  $f(r) = c_0 + c_1 \cdot r$ ,  $c_0 = 0.012$ ,  $c_1 = 0.026$ ,  $c_k = 0$  при  $k \geq 2$ , получим следующие коэффициенты  $a_k$ :  $a_0 = c_0 = 0.012$ ,  $a_1 = 0.1063$ ,  $a_2 = -0.106$ ,  $a_3 = 0.1038$ ,  $a_4 = -0.0971$ ,  $a_5 = 0.0821$ . На Рис.1 представлен график аппроксимируемой прямой  $0.012 + 0.026 \cdot r$ , и двух аппроксимирующих кривых: первая кривая (кривая синего цвета) получена при помощи вычисления коэффициентов разложения  $f(r)$  по формуле (25). Другая — получена при помощи разложения функции Бесселя  $J_0(\lambda_k r / R_0)$  в степенной ряд и оценки  $\lambda_k < 3k + 1$ ,  $k \leq 20$  для нулей функции Бесселя нулевого порядка. Вторая кривая (кривая красного цвета) взята в качестве основной кривой для дальнейших вычислений. Коэффициенты  $a_k$  второй аппроксимирующей определяются по следующим формулам:  $a_k = H \cdot k$ , при  $1 \leq k \leq 20$ ,  $a_0 = 0.012$ ,  $a_k = 0$  при  $k > 20$ ,

$$f(r) = c_0 + c_1 \cdot r + c_2 \cdot r^2 + \dots + c_k \cdot r^k = a_0 + a_1 J_0(\lambda_1 r / R_0) + a_2 J_0(\lambda_2 r / R_0) + \dots + a_k J_0(\lambda_k r / R_0).$$

Подставляя эти коэффициенты  $a_k$  в общее решение (22), получим решение краевой задачи для волнового уравнения (8):

$$u(r, z, t) = z_0 \exp(-\gamma_0 z) \cos(\varphi_0) [0.012 + H \cdot \sum_{k=1}^{20} k \cdot \cos(tc_s \sqrt{(\lambda_k / R_0)^2 - (4/3)\pi G \rho_0 / c_s^2 - \gamma_0^2}) \cdot J_0(\lambda_k r / R_0)], c = c_s. \quad (26)$$



Согласно начальному условию  $u_t(r, \varphi, 0) = 0$  коэффициенты  $b_{kv}$  в общем решении (22) будут равны нулю. В случае вращения диска, необходимо внести изменения в начальные и граничные условия. Новые условия будут следующими:

$$\begin{aligned} u(r, z, 0) &= z_0 \exp(-\gamma_0 z) \cdot f(r, \varphi), \\ u(R_0, z, t) &= 0.012 \cdot z_0 \exp(-\gamma_0 \cdot z) \cos[(GM/R_0^3)^{1/2} t]. \end{aligned}$$

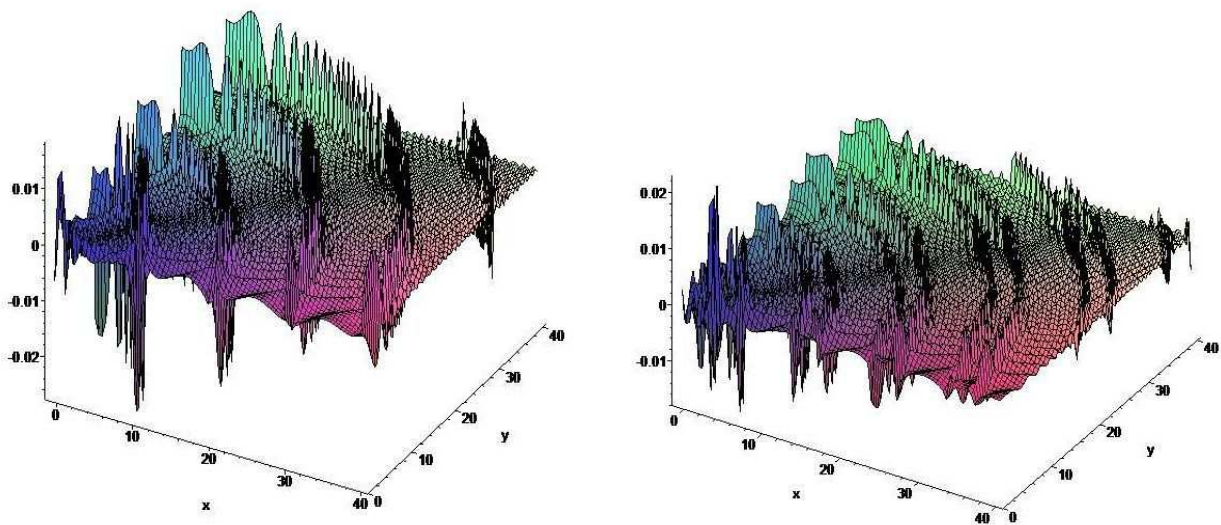
Решение (12) при этом примет следующую форму:

$$\begin{aligned} u(r, z, t) &= z_0 \exp(-\gamma_0 z) \cos[(GM/R_0^3)^{1/2} t] \cdot \\ &\{0.012 + H \cdot \sum_{k=1}^{20} k \cdot \cos(tc_s \sqrt{(\lambda_k/R_0)^2 - (4/3)\pi G \rho_0 / c_s^2 - \gamma_0^2}) \cdot J_0(\lambda_k r / R_0)\}. \end{aligned}$$

**Применение системы Maple для построения 3-D профилей плотности протопланетного диска.** Применение компьютерных систем аналитического вычисления позволяет достаточно просто вычислять интегралы, находить общие решения уравнений и решения краевых задач. Однако наиболее эффективными являются такие системы в тех случаях, когда необходима 3-D визуализация решения краевых задач. Приведем фрагмент программы, написанный для системы Maple, при помощи которого были вычислены нули функции Бесселя нулевого порядка и получено компьютерное (Maple) представление ряда (26):

```
> BesselJZeros(0,7); u:=0; R:=5; H:=0.1081; UT:=0;
  RT:=evalf(1/((R/2)^(3/8))*(1/R)); UD:=0; KR0:=1.5;
> evalf(BesselJZeros(0,7));
> plot(BesselJ(0,x), x=0..42);
> for i from 1 by 1 to 20 do
  L(i):=evalf(BesselJZeros(0,i))
end do;
> for i from 1 by 1 to 20 do
  u:= u + H*i*evalf(BesselJ(0, L(i)*r/R))
end do;
> for i from 1 by 1 to 20 do
  UT:=UT+H*i/((R/2)^(3/8))*cos(RT*L(i)*T)*evalf(BesselJ(0,L(i)*r/R))
end do;
> R01:=evalf(subs(T=0,UT));
> R02:=evalf(subs(T=5,UT));
> r:=(x^2+y^2)^(1/2);
> plot3d(R01,x=0.7..40, y=0.7..40, grid=[90,90]);
> r:=(x^2+y^2)^(1/2);
> plot3d(R02, x=-0.7..40, y=0.7..40, grid=[90,90]);
```

После этого, при помощи операторов 3-D графики системы Maple, можно достаточно просто получить 3-D профили плотности протопланетных дисков. На рисунках 2а-б представлены результаты применения оператора plot3d. По изменениям форм профилей плотности протопланетного диска можно сделать вывод о том, что механизм сжатия протозвездного облака мог быть одновременно и основным механизмом фрагментации протопланетного диска на протопланетные кольца.



**Рис. 2.** 3-D профили плотности  $\rho(r, \varphi, t) = \rho_0[1 + u(r, \varphi, t)]$  для параметра  $R_0 = 5a.e.$  и  $1 \leq r \leq 40$  (5 а.е.). График функции  $u(r, \varphi, t)$  : а) для  $t = 0$ ; б) для  $t = 5$ ,  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $0.7 \leq x \leq 40$ ,  $0.7 \leq y \leq 40(AU)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ,  $z = 0$ ,  $z_0 = 1$ .

## Литература

1. Адамс Ф.С. Инфракрасные спектры вращающихся протозвезд / Ф.С. Адамс, Ф. Шю // *Astrophys. J.* - 1986. - № 308. С. 836-852.
2. Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет / В.С. Сафронов. - М.: Наука, 1969. - 244 с.
3. Сурдин В.Г. Протозвезды: где и как формируются звезды / В.Г. Сурдин, С.А. Ламзин. - М.: Наука, 1992. - 192 с.

## APPLICATION OF COMPUTER SYSTEM MAPLE IN SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE SPECIAL KIND WAVE EQUATION: 3-D DENSITY PROFILES OF THE PROTO-PLANETARI DISK

T.R. Abdulmyanov

*From the equations of hydrodynamics, with the help of their simplicity, the wave equation and a formula for calculating the density profiles of proto-planetary disks is obtained.*

Keywords: computer modeling, surface density of the proto-planetary disk.